Was ist und wozu dient die Mengenlehre ?

Hans-Christian Reichel, Wien

Ich habe dieses Thema gewählt, weil die sogenannte Mengenlehre immer noch in der Öffentlichkeit als kontroversielles Thema des Mathematikunterrichts gehandelt wird. Ferner auch deswegen, weil dieses Schlagwort in der Regel, und pars pro toto, fast synomyn und wohl auch zu unrecht für die sogenannte "neue Mathematik", also für alle Veränderungen des Mathematikunterrichts der letzten Jahrzehnte herhalten mußte. Vor allem aber habe ich dieses Thema gewählt, weil es gerade heuer 100 Jahre her ist, daß Georg CANTOR die erste allgemeine Definition des Mengenbegriffes vorgelegt hat.

Im Jahre 1883 schreibt Georg Cantor in einer berühmt gewordenen Arbeit, in den Mathematischen Annalen [CA] - also mehr als ein Jahrzehnt vor der in den meisten Schulbüchern angegebenen "Definition" des Mengenbegriffs (vgl. hiezu Seite 3):

"Unter einer Mannigfaltigkeit oder Menge verstehe ich nämlich allgemein jedes Viele, welches sich als Eines denken läßt, d.h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welcher durch ein Gesetz zu einem Ganzen verbunden werden kann, [und ich glaube, hiermit etwas zu definieren, welches verwandt ist mit dem Platonischen ε ι δ ο ς oder ι δ έ α ...]". (Auf diesen eher philosophischen Aspekt soll hier nicht eingegangen werden, darum ist diese Stelle eingeklammert).

In dieser ersten allgemeinen Mengendefinition, die ein wenig abweicht von dem, was in den Schulbüchern steht, ist etwas enthalten, nämlich die "Verdinglichung" einer Eigenschaft (naive Form des Komprehensionsaxioms). Es geht bei der Mengendefinition nach Cantor ursprünglich offenbar um die Verdinglichung ("Hypostasierung") einer Eigenschaft. Man hat z.B. einerseits die Eigenschaft "Primzahl sein", d.h. "x ist Primzahl" und andererseits die Menge aller "Träger" dieser Eigenschaft, also die Menge aller Primzahlen. Die "Uridee" der Mengendefinition ist also die "Konkretisierung" einer Eigenschaft, eines Prädikates, durch Zusammenfassen aller Träger dieser Eigenschaft:

Eigenschaft(Prädikat) Variable	Menge
$E\,(x)$	$\{x \mid E(x)\}$
Eigenschaft von x; Aussage über x	Menge aller x, für die gilt..
z.B.: "Primzahl sein" "x ist Primzahl"	z.B.: Menge P aller Primzahlen

So nützlich übrigens der Begriff der Menge in den letzten hundert Jahren geworden ist, so wenig deutlich ist das Wort "Menge". Dieses Wort hat bekanntlich nichts mit dem umgangssprachlichen Wort "Menge" zu tun, wie es etwa in dem Satz "Gestern habe ich eine Menge Cola getrunken" gebraucht wird. Es scheint mir hier das französische Wort "ensemble" oder das holländische "verzaameling" oder auch das englische Wort "set" deutlicher zu sein. Ursprünglich hat das Georg Cantor auch gespürt. Er hat von "Mannigfaltigkeit", vom "Gesamt", vom "Inbegriff" und ähnlichem gesprochen. An der Terminologie kann man allerdings heute nichts mehr ändern.

Tatsache ist, daß in den vergangenen hundert Jahren die Begriffe und Methoden der Mengenlehre, die - wie wir sehen werden - zunächst bei Cantor auf ganz spezielle mathematische Fragestellungen gerichtet waren, sich (bereits in Cantors Händen schon) als außerordentlich verallgemeinerungsfähiges und ungemein nützliches Instrument erwiesen haben. Die Mengenlehre wurde schon bald nach ihrer Begründung viel mehr als eine bloß mathematische Teildisziplin. Große Teile der Mathematik sind von ihr beeinflußt und innerlich umgestaltet worden. Auf ihrer Grundlage wurden ganz neue mathematische Gebiete geschaffen, andere veränderten sich wesentlich. Durch ihre Denk- und Sprechweise sind neue Gebiete entstanden; z.B. Topologie, Funktionalanalysis, sowie Gebiete, die es bereits gegeben hat, die aber - zumindest formal - total verändert wurden, wie z.B. die Algebra, die Wahrscheinlichkeitstheorie, Maßtheorie, u.a.m., also Gebiete, die ohne Mengenlehre heute gar nicht denkbar wären. Das beginnt bei der Verwendung der Mengensprache und endet bei tiefliegenden Resultaten, z.B. sogenannten "Unabhängigkeitsresultaten" (vgl. den Schluß der Arbeit).

Zudem hat die Mengenlehre eine vorher nicht gekannte Vereinheitlichung und Präzisierung der Mathematik gebracht; auch darüber wird zu sprechen sein. Sie hat vielfach die sprachlichen Mittel bereitgestellt zur Exaktifizierung weiter Teile der Mathematik, und das hat sich schließlich eben auch im Mathematikunterricht niedergeschlagen, dort aber leider bisweilen mit falschem und verzerrtem Stellenwert, falschen Betonungen und falschem Sinn, so daß neben den unbestrittenen Vorteilen auch Nachteile, und mehr noch: die inzwischen allseits bekannten Auswüchse zu beobachten sind.

Jedenfalls muß man aber feststellen: Wenn man die großen Entwicklungsschübe der Mathematik im Laufe der letzten hundert Jahre durch Schlagworte kennzeichnen möchte, so muß man für die zweite Hälfte des 20.Jahrhunderts sicherlich den Computer nennen und die Mathematik, die mit der Entwicklung, der Erfindung und der Weiterentwicklung des Computers zusammenhängt (Informatik, Numerik, etc.). Aber zumindest für die erste Hälfte dieses Jahrhunderts, grob gesprochen, muß man an ganz prominenter Stelle den Begriff der Menge, oder besser die Auswirkungen des Cantor'schen Mengenbegriffs nennen. Beide Begriffe (Computer und Mengenlehre) haben ja übrigens gemeinsam, daß sie auch außerhalb der Mathematik in jedermanns Mund sind, so daß sich gerade der Mathematiklehrer mit diesen beiden Begriffen und deren "Umfeld" weit mehr auseinandersetzen muß, als es bis vor einiger Zeit vielleicht noch in der Ausbildung der Lehramtskandidaten üblich und nötig war.

Kehren wir also zu unserem etwas plakativ formulierten Thema zurück: Was ist und wozu dient die Mengenlehre ?

Die auch in der Schule übliche Definition:

"Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen" [CA_2]

stammt aus dem Jahr 1895 (aus G.Cantor's "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre") und ist m.E. didaktisch weniger günstig, weil sie die oben so genannte "Verdinglichung einer Eigenschaft" nicht mehr ausdrückt. Nach dieser "Definition" scheint es dann auch - widersinnigerweise - naheliegend, "beliebig zusammengewürfelte" Mengen wie {, , x, 2} u.ä. zu bilden und mit ihnen - mehr oder minder kindisch - zu operieren.

Außerdem ist ja auch bekannt, daß diese "Definition" nicht haltbar ist, da sie in sich Widersprüche enthält. Wir werden darauf zurückkommen.

Im MU wäre es m.E. aus diesen und anderen Gründen besser, sinngemäß zu sagen: "Eine Menge entsteht, wenn man Dinge nach einem gewissen Gesichtspunkt zusammenfaßt". Eine derartige "genetische Definition" wäre vermutlich für die Zehnjährigen auch eher altersgemäß als der "statische Aspekt" ("...eine Menge <u>ist</u> ...").

Allerdings können wir uns wohl von jener "Definition", wie wir sie auch in vielen Büchern finden, nicht mehr vollständig befreien.

Hier nun noch eine grundsätzliche Bemerkung zur Abklärung der Begriffe, die wir im folgenden verwenden werden:

Die aus einer konkret-anschaulichen Mengendefinition (etwa wie oben) abgeleitete <u>Mengenalgebra</u>, d.h. alle Aussagen, die aus ihr abgeleitet werden, bezeichnet man als "<u>naive Mengenlehre</u>". Naiv deshalb, weil der Begriff direkt der Anschauung entspringt und nicht einer theoretischen Reflexion.

Die Mengenlehre <u>als mathematische Teildisziplin</u> bezeichnet man hingegen als "<u>axiomatische Mengenlehre</u>", weil der Mengenbegriff dort axiomatisch definiert wird. Doch dazu später.

Man erhält einen schönen Einblick in den ursprünglichen und sozusagen "genuinen" Sinn der Mengenlehre, wenn man sich <u>historisch</u> ansieht, aus welchen Fragestellungen heraus die Mengenlehre eigentlich entstanden ist:

Bei der Entwicklung der Analysis im 19.Jahrhundert spielten unendliche Funktionenreihen eine bedeutsame Rolle. Der Unterschied zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz, insbesondere die Tragweite dieser beiden Begriffe, wurde mühsam erarbeitet und formuliert. Die Fragen der Konvergenz spezieller Reihen und umgekehrt, die Frage nach der Darstellung gegebener Funktionen durch spezielle Reihen, war ein zentrales Thema des 19.Jahrhunderts.

Aus diesem "Dunstkreis" - und nicht etwa aus einem spekulativen Bedürfnis nach Abstraktion, Strukturtheorien oder mystischen Überlegungen über den Unendlichkeitsbegriff - kommt auch der Mengenbegriff und die sogenannte "Mengenlehre".

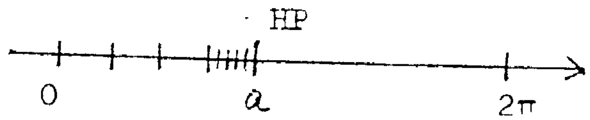
Reihen der Form $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ heißen <u>Fourier-Reihen</u>.

Sie spielen eine bedeutsame Rolle in der Mathematik, aber auch in der Physik, z.B. bei der Zerlegung einer Schwingung in deren Oberschwingungen u.a.m. Neben vielen anderen (Heine, du Bois-Reymond,...) hat sich Georg Cantor um 1870 mit derartigen Reihen intensiv beschäftigt, vor allem mit Eindeutigkeitsfragen.

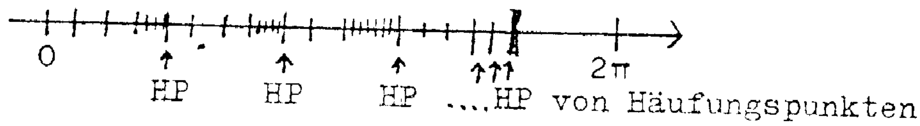
1871 bewies er folgenden Satz:"Zwei Fourier-Reihen, die - etwa auf $[0,2\pi]$ - punktweise gegen dieselbe Grenzfunktion konvergieren, müssen auch dieselben Koeffizienten haben; dies gilt auch dann, wenn man bei endlich vielen Punkten $x_1, x_2, \ldots x_n$ aus $[0,2\pi]$ auf Konvergenz bzw. Gleichheit der Grenzwerte verzichtet.

Hier tritt also eine endliche "Ausnahmemenge" auf. In den Folgejahren hat Cantor untersucht, ob und wie dieser Eindeutigkeitssatz auch bei unendlich vielen Ausnahmepunkten gilt; und eben aus diesem Problemkreis heraus kam es zur Entwicklung des Mengenbegriffes (und - nebenbei gesagt - der Anfangsgründe der mengentheoretischen Topologie). Es ging also darum, Ausnahmemenge und Lage der möglichen Ausnahmepunkte zu beschreiben, und dafür "erfand" Cantor den Mengenbegriff. Es ging ihm also um die möglichen Mengen der Ausnahmepunkte.Hiezu etwas genauer in moderner Sprache:

Eine unendliche Teilmenge $A \subset [0,2\pi]$ muß einen Häufungspunkt auf diesem Intervall haben; z.B.den Wert a



Denkbar ist aber auch, daß sich die Häufungspunkte selbst wieder häufen, etwa so:



Cantor zeigte um 1872: "Bricht die induktiv durch $A^0 := A$ und $A^{n+1} = \{x \in [0,2\pi] / x \text{ ist Häufungspunkt von } A^n\}$ definierte Folge von Teilmengen A^i, i=1, 2,... des Intervalles $[0,2\pi]$ nach endlich vielen Schritten ab, d.h. wird schließlich $A^r = \emptyset (=\{\ \})$ für ein passendes r, so gilt der obige Eindeutigkeitssatz für diese wesentlich komplizierteren Ausnahmemengen A immer noch."(Insbesondere sind daher nicht konstante Funktionen f, die außerhalb einer solchen Menge verschwinden, nicht durch eine Fourier-Reihe darstellbar, es müßte dann ja $f(x) = \Sigma[0 \cdot \cos(nx) + 0 \cdot \sin(nx)]$, n=1,2,..., gelten !).

Aus derartigen - durchaus in der klassischen Mathematik wurzelnden - Untersuchungen entwickelte Cantor nun in den Folgejahren zunächst eine Theorie der (wie wir heute sagen würden)unendlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$. Die Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$ rückten sozusagen als selbständiges Studienobjekt in den Vordergrund. In den Folgejahren entdeckte dann Cantor auch die "eigentliche" Tragweite des von ihm konzipierten Mengenbegriffes: daß und wie man z.B. den Mengenbegriff zur Definition der reellen Zahlen verwenden kann (Kontinuumsproblem), und daß und wie man den von ihm geschaffenen Begriff ganz allgemein zum Vergleich und zur Klassifikation unendlicher Mengen heranziehen könne. Er entdeckte und beschrieb den Begriff der Abzählbarkeit (O) bzw. Überabzählbarkeit (R) und "erfand" die bis heute so bedeutsame Theorie der unendlichen Kardinal- und Ordinalzahlen, den hiefür notwendigen Begriff der Gleichmächtigkeit u.v.a. Dadurch - und durch die vielen weiteren "Anwendungsmöglichkeiten", die später entdeckt wurden - gewann die Mengenlehre auch eine Art "philosophische Dimension", die sie, wenn auch aus anderen Gründen, bis heute auch (!!) innehat. Kurz gesagt - und das hat Cantor selbst schon in seiner vollen Tragweite erkannt - hat er mit seiner Kardinalzahl-Definition einen Rahmen für das Problem des sogenannten "Aktual Unendlichen" geschaffen, dessen Existenz und Abgrenzung vom sogenannten "Potentiell Unendlichen" seit Aristoteles (und wahrscheinlich schon früher) eine kontroversielle Rolle in der Philosophie innehat. Und Cantor blieb es - um es grob zu sagen - auch nicht erspart, in dieser Hinsicht für pseudotheologische Zwecke mißbraucht zu werden. (Er selbst behandelte [CA4] diese Aspekte u.a. auch in historisch-philosophischer Hinsicht und strich vor allem Bolzano als "Vorreiter" mancher seiner Überlegungen heraus).

Doch kehren wir zu der viel wichtigeren Bedeutung der Mengenlehre für die Mathematik selbst zurück. Die in diesem Aufsatz zu Beginn zitierte allgemeine Mengendefinition Cantors steht 1883 - also vor genau 100 Jahren - am Ende einer fünfteiligen Artikelserie in den Mathematischen Annalen, welche so gesehen zum Fundament der weiteren Entwicklung wurde und schließlich auch für die Didaktik und den Mathematikunterricht Bedeutung gewann.

Die Frage: "Wozu dient die Mengenlehre?" wird im folgenden nach drei "Hauptpunkten" gegliedert, welche allerdings voneinander nicht scharf abzugrenzen sind und die - für sich genommen - auch nur "schlagwortartige" Bedeutung haben.

(A) Mengen als "sprachliches Hilfsmittel" (zur besseren Beschreibung von Sachverhalten, als Veranschaulichungshilfe, etc.).

(B) Mengen als "mathematisches Hilfsmittel" (zum besseren Verständnis von Sachverhalten, Schaffung neuer und selbständiger Studienobjekte, usw.)

(C) Mengenlehre in den "Grundlagen der Mathematik" (Exaktifizierung; Vereinheitlichung, Reduktion und logische "Fundierung" mathematischer Begriffsbildungen und Beweismethoden, etc.).

Bemerkung: Es ist logisch, daß eine scharfe Abgrenzung bei diesen Schlagworten weder möglich noch sinnvoll ist, weil z.B. natürlich ein besserer sprachlicher Ausdruck stets auch zu einem besseren mathematischen Verständnis führt und umgekehrt. Sprachliches und mathematisches Verständnis läßt sich nicht scharf trennen, und "mathematische Hilfsmittel" und "Grundlagen der Mathematik" erst recht nicht.

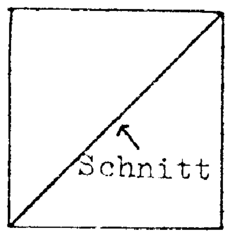
Im Sinne dieser Schlagworte folgen nun einige Beispiele, die exemplarisch zeigen, wo die Mengenlehre Anwendung findet.

(1) Was mit Punkt (A) - "sprachliches Hilfsmittel" - gemeint ist, wurde schon durch den historischen Exkurs deutlich; Mengenbegriff und Mengenalgebra halfen dort bei der sprachlichen Darstellung mathematischer Sachverhalte (Analoges spielt ja auch im Mathematikunterricht eine Rolle!). Aber mehr noch: Es ist wie stets mit einer bestimmten Sprache auch eine gewisse besondere Denkweise verbunden. (vgl.Definition des Flächen- und Volumenbegriffes, des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, Entwicklung der Gruppentheorie und der sogenannten modernen Algebra überhaupt, etc.etc.). In derartiger Weise wurden ganze Teildisziplinen der Mathematik durch die Sprache der Mengenlehre umgestaltet bzw. überhaupt erst ermöglicht, so, wie etwa gewisse Philosophien offenbar auch nur auf dem Boden ganz gewisser Sprachen gedeihen.

Auch im Mathematikunterricht steht dieser Aspekt der Mengenlehre ja im Vordergrund. Etwa bei der Verwendung der Mengensprache in der Geometrie. Allerdings hat das auch negative Aspekte:

Im Lehrplan der 1.Klasse AHS (und HS) steht: "Einführung in die Geometrie mit Hilfe des Mengenbegriffes". Hier ist Vorsicht geboten, denn die Geometrie durchläuft in der Schule eine dreistufige Entwicklung: die Anschauung, das Zeichnen und - zum Schluß wohl - die Beschreibung. Erst hier, bei der Beschreibung, hilft m.E. die Mengenlehre (z.B. Schnittpunktmengen etc.). Also sollte es nicht Einführung in die Geometrie mit Hilfe der Mengenlehre heißen, denn das ist meines Erachtens eine falsche Schwerpunktsetzung.

Bei der Geometrie ist auch noch eine andere Problematik zu erwähnen, nämlich: die geometrischen Figuren als Punktmenge, z.B. der Satz: "eine Gerade ist eine Punktmenge", "ein Quadrat ist eine Punktmenge", etc. Diese Sichtweise ist für gewisse Probleme nützlich,zum Beispiel bei der Frage:"Was ist der Mittelpunkt eines Quadrates?" usw. Hier ist es nützlich, das Quadrat als Punktmenge zu sehen, dann ist der Mittelpunkt eben einer der vielen Punkte. Es gibt aber auch Probleme, bei denen das nicht der Fall ist, und man daher eine andere Sichtweise vorzieht. Zum Beispiel bei dem Problem, das schon Aristoteles hatte, und das erst in einem jüngst erschienenen Aufsatz von R.Fischer [FI] wieder deutlich bearbeitet wurde, die Frage, ob man ein Quadrat in zwei deckungsgleiche Hälften teilen kann. Anschauungsmäßig ist das klar, man schneidet das Quadrat diagonal durch. Aber wenn das Quadrat als eine Punktmenge betrachtet wird, kommt sofort die Frage:"Wohin gehören die Punkte der Schnittgeraden?" Halbiert man die Schnittgerade und zählt die eine Hälfte zum einen Teil und die zweite Hälfte zum anderen, stellt sich wieder die Frage, wohin man den Mittelpunkt dieser Schnittlinie zählt.Man kann zeigen, daß man das Quadrat(aus dem Blickpunkt der Mengenlehre) nicht in zwei kongruente Teile teilen kann. Dieses "Paradoxon" wird jeder Laie als Spitzfindigkeit ansehen. Es zeigt aber, wohin die "mengentheoretische" Auffassung, das Quadrat sei eine Punktmenge, führt. Auf den beiden Abstraktionsstufen (naiv-geometrische und mengentheoretische) liegen eben - genau gesehen - andere Begriffe vor.*) (Vgl.auch H.-C.Reichel:Wie exakt ist die Mathematik?" Vortrag U.Wien, Ms.wird publ.)



*) Die Situation ist im Kern zwar m.E.treffend, aber doch ein wenig vereinfacht dargestellt. Die "naive"Auffassung läßt sich natürlich auch auf einer exakteren Stufe retten. Vgl.den weiter unten zitierten Aufsatz von Aumann.

Jedes Problem erheischt sozusagen die "richtige" Abstraktionsstufe bei der Begriffsbildung. Vgl. z.B. [FI] oder [RE] und vor allem den Aufsatz von Aumann: "Sind die geometrischen Figuren Mengen?"Elemente der Math.7(1952),25-28.

Ein anderes Paradoxon, das ebenfalls erst durch Einbringung mengentheoretischer Gesichtspunkte in die Geometrie entsteht (Auswahlaxiom, etc.), ist folgendes (Banach-Tarski): Es ist möglich, eine Kugel so in drei paarweise kongruente Teile zu zerlegen, daß man zwei dieser Teile so zusammensetzen kann, daß wieder die ursprüngliche Kugel entsteht (oder sogar eine größere). Oder (Hausdorff): Es ist möglich, die Oberfläche einer Kugel so in drei paarweise kongruente Teile zu erlegen, daß einer mit der Vereinigung der beiden anderen kongruent ist!

Die meisten derartigen Paradoxien haben ihre "Ursache" darin, daß durch die Einbringung der Mengenlehre (und deren Problematik) in die Geometrie die ursprünglich "naiv" geometrischen Begriffe, wie z.B. "teilen", "zusammensetzen", "Kugel", "Quadrat", etc. einen anderen (in gewisser Weise erweiterten) Sinn erhalten (vgl. weiter unten).

Die ML brachte also für viele Probleme und Begriffsbildungen zunächst nur eine andere, eine neue Sprechweise. (Das tritt ja auch im MU an vielen Stellen auf. Vgl. z.B. den Lehrplan). Wir sagten aber bereits, daß sie (z.T. dadurch,und in weiterer Folge) auch neue Denkweisen einbrachte (z.B. Stichwort: "Strukturmathematik"). Zum Thema "Neue Denkweisen" ein weiteres Beispiel:

(2) Bis zur Mitte des 19.Jahrhunderts hat man integrierbare Funktionen, stetige Funktionen, differenzierbare Funktionen, usw. mehr oder minder als individuelle Einzelobjekte betrachtet. Durch die Mengenlehre tritt danach ein "Standpunktwechsel" ein !

Nun wird z.B. die Menge C_1 aller differenzierbaren Funktionen betrachtet oder die Menge C_0 aller stetigen Funktionen, die Menge C aller integrierbaren Funktionen usw. untersucht; es treten also neue Studienobjekte auf, und daraus entwickeln sich neue Gebiete der Mathematik, z.B. die Funktionalanalysis. Das Integral z.B. kann nunmehr aufgefaßt werden als Funktion, welche jedem Element (z.B.)der Menge C_0 eine reelle Zahl zuordnet. Diese Funktion hat natürlich ganz bestimmte Eigenschaften (z.B. Linearität u.a.) und es kann z.B. nun umgekehrt gefragt werden, inwieweit - grob gesagt - diese Eigenschaften das Integral bereits eindeutig festlegen, u.a.m. Das ist eine echte Bereicherung der Analysis. Durch Hinzunahme der "Mengensprache" und Weiterentwicklung der dadurch entstehenden neuen Aspekte entstehen neue Denkweisen und damit neue Beweismethoden. Hiefür nun ein an sich völlig anderes, aber typisches und schlagendes Beispiel:

(3) Cantor hat die Mengenlehre in seinen ersten Arbeiten zum wechselseitigen Vergleich verschiedener (unendlicher) Mengen verwendet. Er zeigte z.B. (schon 1874): Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar;die Menge der irrationalen Zahlen aber nicht, sie besteht somit aus "mehr" Elementen.

Derartige Überlegungen können z.B. zu sogenannten "formalen" Existenzbeweisen führen, die zu Cantors Zeiten zu großen und scharf geführten Diskussionen geführt haben.

Auch heute gibt es manche Mathematiker, die "reine" (also nicht konstruktive) Existenzbeweise nicht ohne weiteres gelten lassen, jedenfalls stellen sie ein immer noch kontroverses Thema der Philosophie der Mathematik dar. Im folgenden ein klassisches Beispiel eines reinen Existenzsatzes, der auf den eben angesprochenen Denkweisen der Mengenlehre fußt (und auf Cantor zurückgeht):

Definition: Eine Zahl heißt algebraisch, wenn sie Nullstelle eines Polynoms $p(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ mit ganzzahligen Koeffizienten a_i ist (und $a_n \neq 0$).

Wie viele solche algebraische Zahlen gibt es? Nun, jedes einzelne Polynom hat nur endlich viele Nullstellen und es gibt nur abzählbar viele solche Polynome, denn für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ gibt es ja nur abzählbar viele Möglichkeiten. (Einen genauen Beweis, etwa mit Hilfe des Begriffes der "Höhe" einer algebraischen Zahl, entnehme man einem einführenden Buch über Zahlentheorie).

Ergo gibt es nur abzählbar viele algebraische Zahlen. Da aber die Menge aller reellen Zahlen nicht abzählbar ist, läßt sich(mit Cantor) folgern: Es gibt mindestens eine Zahl, die nicht algebraisch ist,und derartige Zahlen heißen "transzendent". Dieser Beweis ist ein Prototyp eines formalen Existenzbeweises. Es wird behauptet, daß es transzendente Zahlen gibt, ohne daß eine einzige solche Zahl konkret konstruiert wird (Konkrete Beispiele wären z.B. π oder die Eulersche Zahl e, die ebenfalls im MU auftritt. Der Beweis, daß diese Zahlen transzendent sind, ist aber viel schwerer.)

Aus dem "Dunstkreis" der Mengenlehre stammen heute viele weitere "formale Existenzbeweise", deren "Gültigkeit" z.T. sogar Streitpunkte für diejenigen Mathematiker darstellen, welche sich mit den Grundlagen der Mathematik beschäftigen. Das Beispiel sollte aber nur zeigen, daß im Gefolge der Mengenlehre auch neue Beweismethoden entstanden, die großteils heute zum festen Bestand der Mathematik gehören, die aber in weiterer Folge auch durchaus "offene" Diskussionen auslösen können.

Bemerkung: Bei diesen Beispielen wurde schon längst Punkt (A), ja, sogar schon Punkt (B) verlassen. Denn die Frage, ob man etwas als Beweis gelten läßt oder nicht, gilt als Grundlagenfrage, und das ist bereits Punkt (C).

(4) Ein weiteres Beispiel, wo die Mengenlehre zunächst "nur" als sprachliches Hilfsmittel auftritt, danach aber ein ganzes Gebiet dadurch (und durch Einbringung ihrer Denkweisen und eigenständigen Strukturen) neu formuliert wurde, ist die Aussagenlogik. Man entdeckt, daß man mit "Aussagen" A,B,C ... genauso umgehen ("arbeiten", "rechnen") kann wie mit Mengen A,B,C ... Sie alle kennen die entsprechenden Analogien:

$A \wedge B$ ("und") $\longleftrightarrow A \cap B$,
$A \vee B$ ("oder") $\longleftrightarrow A \cup B$,
nicht A $\longleftrightarrow$ Komplement von A, usw.

Diese Analogien treten ja auch im MU frühzeitig auf, und viele behaupten, daß durch diese "Verdinglichung" der Aussagenlogik im "Reiche der Mengenlehre" ein besseres Verständnis jener erzielt werden kann. Ich brauche hier nicht extra zu erwähnen, wie sich daraus in weiterer Folge die Boolesche Algebra und die Schaltalgebra entwickelt haben. Ohne Mengenlehre wären diese Gebiete kaum denkbar. Hiebei wird aber nicht nur die Vorstellungskraft angesprochen, sondern es entsteht sowohl eine "Formalisierung" wie auch "Konkretisierung" der Aussagenlogik. In diesem Zusammenhang sind Namen zu nennen wie Boole, de Morgan, u.a., die ja auch im MU auftreten.

Eigentlich handelt es sich um eine Idee, die bereits Leibniz hatte, und welche mit der Mengenlehre einen gewissen Abschluß gefunden hat.

(5) Noch deutlicher kann man den Aspekt "Mengensprache als Definitionshilfe" bei der Wahrscheinlichkeitstheorie belegen. Indem sich dieses Gebiet heute weitestgehend auf der Mengensprache und Mengenalgebra gründet (Kolmogoroff), hat es eine gewisse Geschlossenheit der Darstellung gefunden. Die Frage "was sind Ereignisse", "was ist Wahrscheinlichkeit" läßt sich bekanntlich (vgl.die Lehrbücher der 8.Klasse AHS) in überaus einleuchtender Weise auf dem Boden der Mengenlehre beantworten. Freilich bringt auch hier die Mengenlehre (sozusagen "von sich aus") gewisse Probleme ein, wie sie in analoger Weise bei den Paradoxien der Geometrie bereits besprochen wurden; z.B.die Existenz von Ereignissen, welchen sich keine Wahrscheinlichkeit zuordnen läßt, u.a.m. (Alle diese Probleme treten allerdings erst bei kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsräumen auf). Es sei erwähnt, daß auch die Wahrscheinlichkeitstheorie unter dem Einfluß der Mengenlehre eine völlig neue "Gestalt" angenommen hat (Begriffsbildungen, Beweismethoden, etc.).

Bemerkung: Auch dieser Aspekt "überstreicht" sozusagen alle drei Punkte (A), (B) und (C) unserer "General-Einteilung"!

(6) Zum Abschluß ein Beispiel, das ganz zum Punkt (C), also zu den Grundlagen der Mathematik, gehört. Wir fragen: Was ist eine natürliche Zahl? Die Frage läßt sich auf mehrfache Art beantworten, doch führt letztlich jede in irgendeiner Form auf die Mengenlehre (näheres siehe z.B. [HA], [HL], [BE]u.a.):

Man kann z.B.-mit J.v.Neumann - den ordinalen Aspekt der natürlichen Zahlen zum "Fundament" der Definition machen. Man definiert: $\emptyset =:0$, $\{\emptyset\}=:1$, $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}=:2,\ldots,\{0,1,\ldots,n\}=:n+1$ usw. Die natürlichen Zahlen werden also hier als Mengen einer gewissen "Bauart" definiert. (Im Grunde handelt es sich um ein "Modell der Peanoaxiome im Reich der Mengenlehre").

Die Schulbücher (in Deutschland und Österreich) folgten jedoch der älteren Idee Freges bzw. Russells, welche natürliche Zahlen durch Klassen gleichmächtiger endlicher Mengen definiert, also den kardinalen Aspekt in den Vordergrund stellt.

Freilich muß dann zunächst - und zwar ohne Verwendung natürlicher (Kardinal-)Zahlen - definiert werden, wann eine Menge endlich ist! Vor allem aber gehört der Begriff "Klasse von Mengen" zu den besonders problematischen Begriffsbildungen, die - so anschaulich sie zunächst aussehen - große Probleme in sich bergen.

Didaktische Bemerkung: Hier möchte ich eine Bemerkung zum MU einflechten, betreffend die 1.Klasse AHS: m.E. sollte es dort um eine "verständige Handhabung" der natürlichen Zahlen gehen, nicht aber um eine begriffliche Verankerung der natürlichen Zahlen in der Mengenlehre (d.h.um die Beantwortung der rein theoretischen Frage: "Was ist eine natürliche Zahl?"). Mit A.Kirsch [KI] meine ich, daß "Mathematik l e h r e n" bedeutet: die Sache "zugänglich" machen; und eine Sache wird i.a. einem Schüler nicht leichter zugänglich, wenn man damit beginnt, ihre logische Struktur (d.h.Fundierung) zu erklären. Man sollte - plakativ ausgedrückt - den "logischen Zugang" nicht mit dem "psychologischen Zugang" verwechseln. M.E. hat die Frage, was natürliche Zahlen seien, zunächst in der 1.Klasse AHS nichts zu suchen. Dort sollte man sich m.E. mit dem Satz "die Zahlen 1,2,3,... heißen natürliche Zahlen" begnügen, um danach vor allem deren "verständige Handhabung" zu üben.-Es mag hier wahrscheinlich ein prinzipieller Fehler der "Neuen Schulmathematik" vorgelegen haben, der aber heute großteils auch als solcher erkannt wurde.

Doch kehren wir zu unserem Thema zurück. Wir haben gesehen: Der "rein theoretische" Wunsch, natürliche Zahlen (und in weiterer Folge auch alle anderen "Arten" von Zahlen) zu definieren und nicht bloß anzugeben, wie man mit diesen Zahlen rechnet ("arbeitet"), kann im "Reich" der Mengenlehre befriedigt werden.Es liegt dann sozusagen eine Rückführung des Zahlbegriffes auf den Mengenbegriff vor. Analog hat man auch versucht - in einer Art "Ökonomieprinzip" - viele andere Begriffe der (alltäglichen) Mathematik auf den Mengenbegriff zurückzuführen. (Wir haben das ja bei der Geometrie auch schon angedeutet). Dieser "Philosophie" zufolge wäre dann - in letzter, utopischer Konsequenz - die Mathematik eine Art umgekehrte Pyramide, welche auf ihrer Spitze, d.h. dem Mengenbegriff, ruht.*)

Weitere Beispiele hiefür - soweit sie in Schulbüchern zur Sprache kommen - sind etwa:
a) Was ist eine Funktion? (vgl.5.Kl.AHS). Auch hier erfolgt die Antwort in mehreren "Abstraktionsstufen". Letztlich wird vielfach der Begriff "Funktion" als spezielle "Relation" beschrieben, und diese wieder "ist" eine (spezielle Art von) Teilmenge der Produktmenge aus Definitions- und Wertbereich von f. Wieder liegt also letztlich eine Rückführung auf den Mengenbegriff vor. - Oder:

b) Was ist ein geordnetes Paar (a,b)? - Eine Möglichkeit, diesen

---

*) Bekanntlich hat Bourbaki-eine Mathematikergruppe, die in den letzten beiden Jahrzehnten durch ein vielbändiges Werk, eine Art enzyklopädische "Gesamtdarstellung" der Mathematik anstrebten und z.T. verwirklichten, - großen Einfluß auf die Entwicklung der Schulmathematik gehabt. Der erste Band dieses Werkes heißt "Mengenlehre" (Theorie des Ensembles)! Dieses Werk hat manches zu einer aus heutiger Sicht z.T. "übertriebenen" Wertschätzung der sog. "Strukturmathematik" beigetragen. Auch das hat sich in der sog. "New Math." der Schullehrpläne der meisten Länder m.E. zu stark niedergeschlagen und pendelt sich heute eher wieder ein.

fundamentalen Begriff zu definieren, ist wieder seine Rückführung auf den Mengenbegriff. Etwa so: (a,b)"ist" die Menge $\{\{a\}, \{a,b\}\}$.

Nochmals sei auch hier gewarnt: Diese Definition befriedigt ein gewisses Interesse, den Begriff "geordnetes Paar" logisch korrekt "abzusichern", zu definieren. Der praktischen Handhabung dieses Begriffes und dem "Verständnis" hiefür ist dadurch m.E. wenig gedient. Letzteres soll aber m.E. im Schulunterricht primär sein!

Diese Beispiele mögen zur Illustration des oben Gesagten genügen. Ziel dieser "Philosophie" ist die Vermeidung undefinierter, vager und (allzu) anschaulicher Begriffe durch deren Rückführung auf den (dann möglicherweise einzigen nicht näher "inhaltlich" definierten Mengenbegriff. Dieses - ich möchte sagen, "puristisch-theoretische" Ziel steht aber m.E. im MU allenfalls am Rande und gehört jedenfalls erst in eine sehr "hohe" Altersgruppe der AHS, evtl. 8.Klasse, wo es auch in gewisser Weise vom Lehrplan her eher gerechtfertigt wäre. Doch selbst dann muß deutlich werden, daß es - wie beschrieben - eben um ein "theoretisches Ziel" geht.

Als Fazit und als "Grundfrage" dieser "Philosophie" ergibt sich dann aber umso drängender die Frage: Was ist nun aber eine "Menge"? Und diese Frage - die ja auch im Titel angesprochen ist - soll nun abschließend behandelt (bzw.gestreift) werden.

Die - auch in Schulbüchern angegebene - Definition:"Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten in unserer Anschauung oder unserem Denken (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen", die Cantor 1895 gegeben hat, kann bekanntlich nicht als "Definition" im strengen Sinn gelten, sie hat Widersprüche in sich (s.u.). Sie geht letztlich ja davon aus, daß man alles Denkbare auch zusammenfassen kann, z.B. alle Blonden, alle Dicken, usw. Für endlich viele Dinge ist das möglich, bei großen (jedenfalls unendlichen) "Gesamtheiten" ergeben sich Probleme. *)

Solche Widersprüche (Antinomien) sind z.B. die Russellsche Antinomie (1903): Es gibt - jedenfalls nach der obigen "Definition" - Mengen, die sich selbst als Element enthalten ($M = \{1,x,\{0,1\},M\}$) ** und solche, die sich nicht enthalten. Sei $\mathfrak{m} = \{M | M \notin M\}$ die Menge aller Mengen M, die sich nicht selbst als Element enthalten. Dann gilt offenbar: $\mathfrak{m} \in \mathfrak{m} \Leftrightarrow \mathfrak{m} \notin \mathfrak{m}$. Das ist eher ein Widerspruch! Eine nette "Einkleidung" dessen ist etwa folgende: Jede große Bibliothek hat Katalogbände, die selbst Nummern tragen. Solche Katalogbände können sich nun selbst verzeichnen

---

*) Ganz allgemein ergeben sich natürlich (erkenntnistheoretische) Probleme, wenn man Erfahrungen , die man mit endlichen Gesamtheiten gemacht hat, ohne weiteres auf unendliche überträgt! Gerade diese Problematik steht ja bei der Mengenlehre auch an!

**Etwa auch die "Menge aller Mengen", die sich bei naiver "Anwendung" unserer "Definition" eigentlich bilden lassen müßte.

oder nicht. Ein Bibliothekar-Lehrling soll nun genau die Nummern aller derjenigen Katalogbände zu einem neuen Katalogband zusammenfassen, welche sich nicht selbst verzeichnen. Er verzweifelt! Soll er die Nummer dieses neuen Katalogbandes in demselben nun aufnehmen oder nicht? In keinem Fall hat er den Arbeitsauftrag voll erledigt. - Diese "Einkleidung" trifft die Sache nicht vollständig, erläutert aber das Prinzip m.E. recht gut, ebenso die berühmte "Definition" des Dorfbarbiers (= derjenige, der alle rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Rasiert er sich selbst?). Wenngleich dieses "Beispiel" eher "semantische Aspekte" aufweist, so hat doch auch die Russellsche Antinomie im Grunde etwas von der berühmten griechischen Antinomie des Lügners, die sich hier letztlich spiegelt. Das führt jetzt aber zu weit.

Es gibt noch andere Antinomien der Mengenlehre aus deren "Urzeit". Cantor selbst hat schon gewußt, daß es nicht die Menge $\mathfrak{M}$ aller Mengen (Allmenge) geben kann. Das bezeichnet man als Cantorsche Antinomie (1899). Cantor hat gezeigt, wenn man die Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ einer Menge X bildet, so ist sie jedenfalls mächtiger als X. Wenn es nun eine "Allmenge" $\mathfrak{M}$ gäbe, so wäre deren Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})$ gleichzeitig auch eine Teilmenge von $\mathfrak{M}$ und kann daher keine höhere Mächtigkeit als $\mathfrak{M}$ haben. (Genaueres siehe z.B. [HL], [HA] u.a.).

Ein drittes Beispiel für solch eine Antinomie ist die Burali-Forti-Antinomie (1897): Man bilde die Menge B aller Ordinalzahlen β. Da B selbst wohlordnungsfähig ist, gehört zu dieser Wohlordnung auch eine Ordinalzahl β', die dann auch zu B gehört und damit einem echten "Anfangsabschnitt" $[0,\beta')$ von B repräsentieren müßte, was den Sätzen der Ordinalzahltheorie widerspricht.

Diese (u.a.) "Antinomien" der Mengenlehre haben (wie es in populär-wissenschaftlichen Büchern steht) die sogenannte "Grundlagenkrise" des 20.Jh. ausgelöst. Zur "Bewältigung" dieser Antinomien wurden mehrfach prinzipielle Änderungen der Cantorschen Mengendefinition vorgeschlagen, z.B. Russells Typentheorie u.a.

Die heute üblichen - und vom Prinzip her anderen - Definitionen des Mengenbegriffs erfolgen nach Vorschlägen z.B. Zermelos, Fraenkels, Gödels, Hilberts, Bernays, u.a.

Man versucht keine "inhaltlich-konkrete" Erklärung des Mengenbegriffs, sondern eine "formal-axiomatische". Der Begriff "Menge" wird also nicht durch andere, evtl. einfachere Begriffe erklärt, sondern durch seine Eigenschaften festgelegt (wie etwa die Figuren beim Schachspiel).

Durch einen Vergleich mit der Geometrie möge dies verständlicher werden: Euklid hat um 300 v.Chr. ("konkret-inhaltlich") zu definieren versucht: "Ein Punkt ist, was keinen Teil hat", oder: "eine Linie ist eine Länge ohne Breite", oder: "eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat", usw.

Das sind auch keine im heutigen Sinn "haltbaren" Definitionen. Mit Cantors Mengendefinition haben sie gemeinsam, daß man versucht, das zu Definierende auf etwas anderes, "dinglich Vorstellbares", zurückzuführen. Euklid hat für seine Beweise der geometrischen Sätze in den "Elementen" (vgl. z.B. [KR])diese Definitionen aber nicht (bzw. fast nicht) benützt, sondern nur seine "Postulate". Das sind "Grundsätze" - heute würden wir sagen: "Axiome",-wie z.B. ("salopp" formuliert): (i) zwei verschiedene Gerade in einer Ebene schneiden einander in höchstens einem Punkt; oder: (ii) zwei Punkte bestimmen genau eine "Verbindungsgerade"; oder: (iii) von drei Punkten auf einer Geraden liegt genau einer zwischen den beiden anderen; oder: (iv) in einer Ebene seien gegeben: eine Gerade g und ein Punkt $P \notin g$. Dann gibt es genau eine Parallele zu g durch P. ("Parallelenaxiom"); und andere mehr.

M. Pasch und vor allem D.Hilbert hatten zu Ende des 19.Jh. nun die Idee, bei der Definition von "Punkt", "Ebene" und anderen geometrischen Begriffen auf konkret-inhaltliche "Beschreibungen" überhaupt zu verzichten und sich ausschließlich auf derartige "Spielregeln" (= Axiome) zu stützen. Kurz: die erwähnten Begriffe werden als nicht näher erklärte "Grundbegriffe" verwendet, welche ausschließlich implizit - formal durch eine Reihe von Axiomen definiert werden. Diese geben sozusagen an, wie man mit den Begriffen "arbeitet". (Ebenso wie etwa die natürlichen Zahlen durch die sogenannten Peanoaxiome definiert werden können). Es ist also - wie gesagt - ähnlich wie etwa bei einem Schachspiel, wo auch der Turm z.B. nicht als "dicke Figur mit Zinnen" definiert wird, sondern durch die "Handlungen" (Züge, Bewegungsart, usw.), welche er durchführen darf. Diese Regeln definieren also implizit, was ein Turm "ist", und - analog - die anderen Figuren.

Wichtig ist hiebei vor allem, daß die Axiome widerspruchsfrei sind. (Mit derartigen formalen Fragen beschäftigt sich heute vor allem eine seit Hilbert neue Teildisziplin der Mathematik, die sogenannte "Metamathematik" oder "Beweistheorie".

In der ersten Hälfte des 19.Jh.hat man z.B. entdeckt, daß - in moderner Sprache ausgedrückt - das Parallelenaxiom "PA" (beispielsweise) von den anderen Axiomen der Geometrie "unabhängig" ist, d.h. man kann es den anderen Axiomen hinzufügen, ohne - salopp ausgedrückt - einen Widerspruch zu erhalten, man kann aber ebensogut die Negation des Parallelenaxioms hinzufügen. Solcherart erhält man verschiedene Geometrien, "euklidische" (mit PA) und "nicht-euklidische", wo das PA ausdrücklich nicht gilt. Analoges wird uns auch weiter unten bei der Mengenlehre begegnen; und damit sind wir wieder bei unserem eigentlichen Thema.

Um den Mengenbegriff möglichst widerspruchsfrei zu definieren, bedient man sich heute nämlich der gleichen Methode: man ersetzt die Cantorsche konkret-inhaltliche "Definition" durch eine formal-axiomatische Definition (deshalb auch der Name "axiomatische Mengenlehre").

Hiefür gibt es verschiedene Möglichkeiten, üblich sind vor allem zwei (die in gewisser Weise äquivalent sind): das Axiomensystem von Zermelo-Fraenkel (ZF) und das von Gödel-Bernays-Neumann (GBN). Prinzipiell verläuft alles ähnlich wie bei der Geometrie. Diesmal gilt der Begriff "Menge" bzw. "Klasse" bei (GBN), bezeichnet durch x,y,z,..., als "Grundbegriff", welcher durch eine Reihe von Axiomen ("Spielregeln") implizit definiert wird, wie

beispielsweise (wieder "salopp" formuliert):
(i) $\emptyset$ ist eine Menge (die Existenz der leeren Menge wird also axiomatisch gefordert). Oder: (ii) Mit x und y ist auch $x \cup y = \{a | a \in x \vee a \in y\}$ eine Menge, u.v.a.m.

In unserem Rahmen kann man schon deshalb nicht näher auf diese Axiome eingehen, weil zunächst die Form und die Sprache näher präzisiert werden müßte, in welcher diese Axiome abgefaßt sind. So wäre natürlich schon in (ii) näher zu erklären, was man unter $\{\alpha/\alpha \in x \vee \alpha \in y\}$ zu verstehen hat. Dabei darf man natürlich einerseits keine "Anleihen" bei der naiven Mengenalgebra machen, andererseits sollten aber deren "vorstellungsmäßige Inhalte" im nachhinein natürlich durch den axiomatischen Mengenbegriff (auch formal) erfaßbar sein.

Welche Auswirkungen hat nun diese axiomatisch-formale Vorgangsweise bei der Definition des Mengenbegriffs?

Nun, zunächst sind die Axiome so formuliert, daß es beispielsweise keine Mengen mehr gibt, die sich selbst als Element enthalten. Solche "spielen" aufgrund der Axiome nicht mehr mit. Die Familie aller Mengen ist nunmehr sinnvoll eingeschränkt (Das folgt z.B. aus dem sogenannten Fundierungsaxiom). Die Russellsche Antinomie tritt also nicht mehr auf! (Analoges gilt für die anderen oben zitierten Antinomien: sie treten nicht mehr auf. - Insgesamt konnte die Widerspruchsfreiheit der ZF-Axiome allerdings bis heute nicht bewiesen werden; neue Widersprüche wären also prinzipiell denkbar, wenngleich höchst unwahrscheinlich.)

Soweit also die Vorteile der axiomatischen Mengendefinition. Es gibt aber auch "Nachteile". Auf einen dieser "Nachteile" wollen wir abschließend noch eingehen:

Ähnlich wie das Parallelenaxiom der ebenen Geometrie von den anderen Axiomen der Geometrie unabhängig ist, und es daher als Konsequenz verschiedene Geometrien (z.B. der Ebene) gibt (euklidische und nicht-euklidische), liegt die Sache auch hier. Die (bisher bekannten) Axiomensysteme legen den Mengenbegriff nicht eindeutig fest. Genauer: Bei einem vorgegebenen Axiomensystem, z.B. ZF, ist der Mengenbegriff zwar eindeutig, in verschiedenen Axiomensystemen kann aber der Begriff "Menge" durchaus etwas Verschiedenes bedeuten. Und es gibt bisher kein Kriterium, welches uns sagen würde, welches Axiomensystem wir zur Festlegung des Mengenbegriffs nun wirklich verwenden sollen. (Für die praktische Mathematik sind die Auswirkungen dessen allerdings nicht so schlimm, wenngleich auch da überraschende Situationen entstehen; siehe unten!). Ich will diese etwas vagen Andeutungen an einem Beispiel näher ausführen:

Die Kontinuumshypothese (CH): G. Cantor vermutete, daß es keine Menge ($M \subset \mathbb{R}$) gibt, welche mächtiger als $\mathbb{N}$ (also überabzählbar) ist, aber kleinere Mächtigkeit als $\mathbb{R}$ hat.

Nun ist $\mathbb{R}$ gleichmächtig mit der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (siehe z.B. [HA] oder [HL]). Bezeichnet man daher wie üblich die Mächtigkeit (Kardinalzahl) von $\mathbb{N}$ mit $\aleph_0$ und die der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit $2^{\aleph_0}$, so lautet Cantors Vermutung $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, wobei $\aleph_1$ die kleinste überabzählbare Kardinalzahl ist; (daß es eine solche gibt, läßt sich zeigen).

Bemerkung: Daß $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$ sein muß, folgt aus dem schon vorher zitierten Satz Cantors, daß die Potenzmenge einer Menge M jedenfalls mächtiger ist als M selbst. Die Vermutung, daß "$2^{\aleph_0} = \aleph_1$" gilt, heißt (die spezielle) Kontinuumshypothese (CH).

Im Jahre 1900 hat D.Hilbert in einem berühmten Vortrag bei einem internationalen Mathematikerkongreß - neben anderen für die nachfolgenden Jahrzehnte bedeutsamen Problemen - die Kontinuumshypothese als Problem formuliert und zu einem Beweis oder zu einer Widerlegung aufgefordert.

Gödel hat 1938 gezeigt, daß jedenfalls kein Widerspruch entsteht, wenn man die Aussage "$2^{\aleph_0}=\aleph_1$", also Cantors Vermutung, zu den (Zermelo-Fraenkel-)Axiomen der Mengenlehre dazunimmt. - Man sagt: "Die Kontinuumshypothese ist konsistent (verträglich) mit ZF".

Andererseits hat P.Cohen 1963 gezeigt, daß auch die Negation der Kontinuumshypothese ($\neg$ CH) konsistent mit ZF ist. Man darf also auch - grob gesagt - annehmen, daß $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ ist, ohne zu einem Widerspruch zu gelangen! Die Kontinuumshypothese ist also ebenso unabhängig von den ZF-Axiomen der Mengenlehre, wie es das Parallelenaxiom von den anderen Axiomen der ebenen Geometrie ist. Somit gibt es - wenn man es so ausdrücken will - zwei verschiedene Mengenbegriffe; einer festgelegt durch die ZF-Axiome plus CH, einer durch die ZF-Axiome plus Negation von CH, also ($\neg$ CH).

Das hat viele Auswirkungen auf andere Gebiete der Mathematik, wo man es zunächst gar nicht vermuten würde. Belegen will ich diese Behauptung durch ein Beispiel, welches vom Inhalt her für den Augenblick - und schon gar nicht für den Mathematikunterricht (!) -interessant ist. Es handelt sich um einen tiefliegenden Satz der Algebra,der im Gefolge eines funktionentheoretischen Problems (Cousinsches Problem) entstanden ist. Lesen Sie bitte über die darin enthaltenen Begriffe ruhig hinweg; worum es eigentlich geht, wird gleich danach deutlich werden.

Satz (Stein 1951): Eine abzählbare abelsche Gruppe ist genau dann frei, wenn Ext $(G,\mathbb{Z}) = 0$ (d.h., wenn für jede abelsche Gruppe H mit $\mathbb{Z} \trianglelefteq H$ und $H/\mathbb{Z} \cong G$ gilt: $H = \mathbb{Z} \oplus G$; wenn also jede Erweiterung von $\mathbb{Z}$ durch G zerfällt). - Nun stellt sich natürlich die Frage, ob dieser Satz nur für abzählbare Gruppen gilt, oder vielleicht auch - allgemeiner - für gewisse überabzählbare, vielleicht sogar für alle abelschen Gruppen. In seinem Buch "Infinite Abelian Groups" II,S.186, bezeichnet der bekannte Algebraiker L.Fuchs dieses Problem als eines der schwersten der Gruppentheorie!

1974 hat sich eine überaus überraschende "Lösung" ergeben: Ein jüngerer Mathematiker namens Shelah zeigte nämlich, daß die Antwort auf das gestellte Problem in tiefliegender Weise von dem

Mengenbegriff abhängt, den man zugrundelegt! Für abelsche Gruppen der Mächtigkeit $\aleph_1$ lautet die Antwort auf das gestellte Problem "ja", wenn man mit einem Mengenbegriff arbeitet, welcher die Kontinuumshypothese CH "enthält", wenn also CH "anerkannt" wird. Wenn man aber - was ebensogut möglich ist - den Mengenbegriff durch ZF+($\neg$ CH) festlegt, die Negation der Kontinuumshypothese also als gegeben annimmt, lautet die Antwort "nein"! (grob gesagt!)

Es wurden hier zwar einige - allerdings bloß "technische" - Vergröberungen vorgenommen, es sollte aber bloß an einem Beispiel gezeigt werden, daß es mathematische Probleme gibt, die sich prinzipiell (!) nicht mit "ja" oder "nein" beantworten lassen, sondern deren Lösung von dem jeweiligen Axiomensystem abhängt, mit welchem man den Mengenbegriff aufbaut. Ähnlich, wie eben auch die Frage, wie groß die Winkelsumme im Dreieck sei, verschieden ausfällt, je nachdem, ob man sie im Rahmen der euklidischen Geometrie oder in einer nicht-euklidischen Geometrie beantwortet. Bei der Mengenlehre sind die Auswirkungen aber vielfach tieferliegend, überraschender und jedenfalls noch weiter reichend, weil man - wie oben beschrieben - den Mengenbegriff in gewisser Weise eben als fundamental für weite Teile der Mathematik ansehen kann.

Bei näherer Untersuchung ist die Lage sogar noch ein wenig komplizierter: Außer der Kontinuumshypothese gibt es nämlich noch mehrere andere Axiome (bzw. Sätze), die ebenfalls unabhängig von den ZF-Axiomen der Mengenlehre sind. Eines der prominentesten unabhängigen Axiome neben der Kontinuumshypothese ist das Auswahlaxiom, welches die "Schuld" trägt an den oben zitierten Paradoxien (Banach-Tarski, Hausdorff; Existenz von Ereignissen, welchen man keine Wahrscheinlichkeit zuordnen kann, wenn ein kontinuierlicher Wahrscheinlichkeitsraum vorliegt (i.e. Existenz "nicht-meßbarer Mengen"), u.v.a.m.).

So gesehen, gibt es also viele verschiedene Mengenbegriffe, oder besser: viele durchaus verschiedene und durchaus nicht-äquivalente Möglichkeiten, den Mengenbegriff festzulegen. Ein Kriterium für den "günstigsten" gibt es bisher nicht!

Das also war gemeint, wenn ich vorher sagte, daß die Mengenlehre viele für sie typische Probleme "einbringt", wenn man ein Gebiet (z.B. die Wahrscheinlichkeitstheorie oder die Geometrie) mit ihrer Hilfe aufbaut (formuliert). - Ein Zitat des bedeutenden Logikers Quine (1965) beschreibt die Situation knapp und treffend: "Set theory is less settled and more conjectural than the classical mathematical superstructure that can be founded upon it".

Die Mathematik wurde in diesem Sinn einmal mit einem Baum verglichen: der Stamm (die klassische Mathematik) ist dick und fest, nach oben zu verästeln sich die Zweige, und nach unten zu sind die Wurzeln ebenso fein verästelt und im einzelnen relativ schwächer als der Stamm. –

Nun aber zurück zur "handfesten" Mathematik und zur Schule. In puncto Mengenlehre darf und kann man sich hier (fürs erste) mit einer Erklärung, wie sie sinngemäß etwa in den meisten einführenden Büchern steht, begnügen. Bei Mangoldt-Knopp heißt es z.B.:

"Es ist nicht möglich, den Begriff einer Menge im eigentlichen Sinn zu erklären, d.h. auf noch einfachere Begriffe zurückzuführen. Die Fähigkeit unseres Geistes, Dinge zu einer Einheit, eben die Menge dieser Dinge, gedanklich zusammenzufassen, muß vielmehr als eine der ursprünglichsten Fähigkeiten des Geistes angesehen werden." - Und das ist der pragmatische Standpunkt, den die meisten Mathematiker "prima vista" einnehmen.

Zum Abschluß aber wieder zurück zum konkreten Mathematikunterricht: Man kann hier lange darüber streiten, in welcher Schulstufe es notwendig ist, Mengen einzuführen, und ab wann es notwendig ist, bei diesem oder jenem Problem die Mengenlehre überhaupt zu verwenden, oder ob man wie früher ohne Mengenlehre auskommt. Wenn man die Akzente (Stellenwerte) richtig setzt, ist die Verwendung des Mengenbegriffes mit der elementaren Mengenalgebra sicherlich vielfach sowohl aus fachlichen wie auch aus mathematisch-didaktischen Gründen durchaus sinnvoll.

Es gibt ja auch noch einen anderen als den rein mathematischen Gesichtspunkt, den der sogenannten "allgemeinen Lehrziele", welche im Lehrplan z.T. taxativ erwähnt sind: im Mathematikunterricht sollte man allgemeine Lehrziele, z.B. die Sprachfähigkeit, schulen, oder die Schüler zum kritischen Denken erziehen, u.a.m. Fragt sich nur, wie sich das konkret erreichen läßt. Unter anderem kann aber z.B. auch die Mengenlehre dazu beitragen. Im folgenden Beispiel geht es etwa u.a. um das Lehrziel, zu zeigen, wie Begriffe, die in einem bestimmten Bereich (Umfeld) gewonnen wurden, ihren Sinn verlieren können, wenn man sie über diesen Bereich ohne weitere Überlegungen hinaus ausdehnt. Man fragt etwa: welche Strecke besteht aus "mehr" Punkten, AB oder CD? (Fig.1)

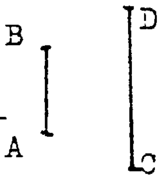
Fig.1


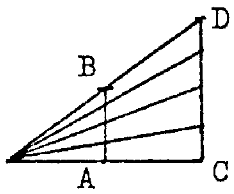
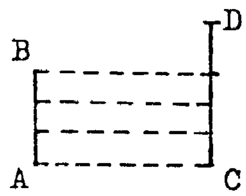
Fig.2


Fig.3


Nun, Fig.2 scheint zu zeigen, daß beide Strecken aus "gleich vielen" Punkten bestehen, Fig.3 zeigt offenbar, daß CD aus "mehr" Punkten besteht. Beides ist "prima vista" richtig. Man sieht: bei unendlichen Mengen verlieren also - grob gesprochen - die Begriffe "mehr", "gleich viel", "weniger" ihren Sinn (!) und müssen durch feinere Begriffsbildungen ersetzt werden. Eben deshalb wurde ja der Begriff der "Gleichmächtigkeit" eingeführt, der bekanntlich eben erst bei unendlichen Mengen seine volle Tragweite entwickelt. (Bei endlichen Mengen bedeutet er bekanntlich dasselbe wie "gleich viele Elemente aufweisend". Der Begriff "gleichmächtig" kann also durch "erweiterndes Umdefinieren" (F.Schweiger) gewonnen werden. Die Punktemengen beider Strecken, AB und CD, sind (lt. Fig.2) gleichmächtig. Analoges erkennt man, wenn man bedenkt, daß man z.B. aus der Menge N alle ungeraden Zahlen herausstreichen kann, und dennoch wird die Menge (im mengentheoretischen Sinn) nicht "kleiner". N ist ja gleichmächtig mit N_g, der Menge der geraden Zahlen. - Mit diesem abschließenden Beispiel will ich aber keinen weiteren "Streit" über den didaktischen Wert der Mengenlehre aufwerfen, sondern vielmehr - mit meinem Dank für Ihre Aufmerksamkeit - einen Schlußpunkt setzen. -

Anmerkungen zum Thema "Unendlichkeitsproblem" (im Text nur knapp erwähnt):

Cantors Theorie unendlicher Kardinal- und Ordinalzahlen, die in den nachfolgenden Jahrzehnten von vielen Mathematikern (u.a. von J.v.Neumann,K.Gödel, P.Cohen u.a.) ausgebaut und gefestigt wurde, ist eine der wichtigsten und "größten" Teilgebiete der Mengenlehre. Sie trug und trägt - wie gesagt - auch Entscheidendes zur Philosophie ("Unendlichkeitsbegriff") bei, zumal sie viele der schon seit den Griechen (und relativ knapp vor Cantor vor allem bei Bolzano) beschriebenen "Paradoxien des Unendlichen" in befriedigender Weise "erklärt". Es geht im wesentlichen um eine"Hierarchie" ("aktual"-)unendlicher Mengen (Mächtigkeiten) und um eine entscheidende Bereicherung des Zahlbegriffes (Es wird "über das Unendliche hinausgezählt"). Zu Cantors Zeit geriet die Mengenlehre auch in die Nähe von philosophischen und - leider - sogar pseudoreligiösen Spekulationen. Cantors Ausgangspunkt war aber - wie ebenfalls beschrieben - konkrete, klassische Mathematik, und das gilt auch für die zahlreichen und heute praktisch selbstverständlichen Anwendungen der Kardinal- und Ordinalzahltheorie.

Zu diesem Thema möchte ich hier noch zwei passende Originalzitate G.Cantors anführen:

1. "Die bisherige Darstellung meiner Untersuchungen in der Mannigfaltigkeitslehre ist an einen Punkt gelangt, wo ihre Fortführung von einer Erweiterung des realen ganzen Zahlbegriffes über die bisherigen Grenzen hinaus abhängig wird, und zwar fällt diese Erweiterung in eine Richtung, in welcher sie meines Wissens bisher von niemandem gesucht worden ist."

2. "Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tamque scribae ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus". (= "Motto" der großen Arbeit Cantors (1895) "Begründung der transfiniten Mengenlehre", welche im Vortrag mehrfach erwähnt wurde.

LITERATUR (Auswahl - ausführliche Liste auf Anfrage)

[BE] O.Becker: Grundlagen der Mathematik in historischer Entwicklung; Suhrkamp, Stw 114.

[CA_1]G.Cantor: Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten V; Math.Annal.21, 545-591 (1883)

[CA_2]G.Cantor: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre I; Math.Annal.46, 481-512 (1895).

[FI] R.Fischer: Die Rolle des Exaktifizierens im Analysisunterricht; Did.d.Math. 6, 212-226 (1978).

[HA] P.R.Halmos; Naive Set Theory; Springer 1974 (Es gibt auch eine deutsche Übersetzung).

[HL] E.Hlawka,C.Binder,P.Schmitt: Grundbegriffe der Mathematik; Prugg-Verlag, Wien 1979.

[KI] A.Kisch: Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht; Did.d.Math.5, 87-101 (1977).

[KR] G.Kropp: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik; BI-Hochschultaschenbuch, Mannheim 1969.

[MA] J.H.Manheim: The genesis of point set topology; Pergamon Press, Oxford 1964.

[RE] H.-C.Reichel: Was ist Topologie? Österr.Math.Ges.,Heft Nr.4 der'Didaktik-Reihe, 130-149 (1979).

[SP] E.Specker: Die Entwicklung der axiomatischen Mengenlehre; Jahresber.d.Dt.Math.-Verein.81, 13-21 (1978).